DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

Definiție : Fie a, b $\in$ **N** . Spunem că <u>a *este divizibil prin* b</u> (notăm $a \vdots b$) sau că <u>b divide pe a</u> (notăm $b|a$) dacă există c $\in$ **N** astfel încât $a = b\cdot c$.

Observație : Dacă $b \neq 0$ atunci $b\,|\,a$ dacă şi numai dacă restul împărțirii lui a la b este 0 .

Proprietăți :

1. $a|a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$;
2. Dacă $a|b$ şi $b|a \Rightarrow a = b$;
3. Dacă $a|b$ şi $b|c \Rightarrow a|c$;
4. $1|a$, $\forall\, a\in \mathbb{N}$;
5. $a|0$, $\forall a\in \mathbb{N}^*$;
6. Dacă $a|1 \Rightarrow a = 1$;
7. Dacă $a|b$ şi $a|c \Rightarrow a|b+c$ şi $a|b - c$;
10. Dacă $a|b \Rightarrow a|b\cdot c$, $\forall\, c\in \mathbb{N}$;
11. Dacă $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_n \Rightarrow a|b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2+\ldots+b_n\cdot c_n$, $\forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$;
12. Dacă $a|b \Rightarrow a\cdot c|b\cdot c$, $\forall c \in \mathbb{N}^*$;
13. Dacă $a\cdot c|b\cdot c$ şi $c \neq 0 \Rightarrow a|b$.
14. Dacă $a|c$ şi $b|c$ iar $(a, b) = 1 \Rightarrow a \cdot b|c$.
15. Dacă $a|b\cdot c$ şi $(a, b) = 1 \Rightarrow a|c$.

Rețineți !

Dacă a, b $\in \mathbb{N}$, a>b şi n$\in \mathbb{N}^*$, atunci au loc relațiile:

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^3 +\ldots a\cdot b^{n-1} + b^{n-1}),$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)\cdot(a^{2n} - a^{2n-1}\cdot b + a^{2n-2}\cdot b^2 -\ldots- a\cdot b^{2n-1} + b^{2n}).$$

Folosind aceste formule se pot demonstra proprietățile:

Dacă a, b $\in \mathbb{N}$, a>b şi n$\in \mathbb{N}^*$, atunci:

1. $a^n - b^n = M_{a-b}$;
2. $a^n - 1 = M_{a-1}$;
3. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = M_{a+b}$;
4. $a^{2n+1} + 1 = M_{a+1}$;
5. $(a+b)^n = M_a + b^n = M_b + a^n$;
6. $(a-b)^{2n} = M_a + b^{2n} = M_b + a^{2n}$;
7. $(a+b)^{2n+1} = M_a - b^{2n+1} = M_b - a^{2n+1}$.

(cu M_k se notează un multiplu al numărului natural k).

Criterii de divizibilitate

Un număr este divizibil cu 2 dacă ultima cifră este 0, 2, 4, 6, 8.
Adică are forma $\overline{a\ldots b0}$, $\overline{a\ldots b2}$, $\overline{a\ldots b4}$, $\overline{a\ldots b6}$, $\overline{a\ldots b8}$

$\mathcal{M}_2$={2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, …………}

Un număr e divizibil cu 5, dacă ultima cifră este 0 sau 5.
Adică are forma $\overline{a\ldots b0}$, $\overline{a\ldots b5}$

$\mathcal{M}_5$={5, 10, 15, 20 , …………}

Un număr e divizibil cu 10, dacă ultima cifră este 0 .
Adică are forma $\overline{a\ldots b0}$

$\mathcal{M}_{10}$={10, 20 , 30, 40, 50, …………}

Un număr este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3
Adică $\overline{a\quad} \vdots 3 \leftrightarrow a + b + c \vdots 3$

$\mathcal{M}_3$={3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, …………}

Exercitii:

1)Determinati elementele multimii:

a)D_{14}

b)D_{18}

c) D_{24}

d) $D_{14} \cap D_{18}$

e) $D_{14} \cap D_{24}$

f) $D_{18} \cap D_{24}$

g) $D_{14} \cap D_{18} \cap D_{24}$

2) Aratati ca numerele de forma $x = 15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 27, unde $n \in N^*$.

3) Aratati ca numerele de forma $x = 72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$ sunt divizibile cu 63, unde $n \in N^*$.

4) Sa se afle numerele naturale a si b, stiind ca sunt indeplinite relatiile: a-b= 156 si (a,b)=13.

5) Determinati numerle de forma $\overline{73x}$ divizible cu 36.

6) Un număr natural este divizibil cu 78. Arătați că numărul respectiv se divide cu 13.

7) Împărțind un număr natural la 48 obținem restul 36. Arătați că numărul dat este divizibil cu 12.

8)Prin împărțirea unui număr *a* la 91, obținem restul 52. Arătați că numărul *a* se divide cu 13.

9) Fie numărul natural $a = 10^n + 26$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că este multiplu de 9, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

10) Arătați că $a = 5^2 + 2 \cdot 5^2 - 25^1$ este multiplu de 6.

11) Arătați că $a = 4^3 + 4^3 + 4^3$ este multiplu de 21.

12) Arătați că $11|(\overline{a\ } + \overline{b\ })$; $\overline{a\ \ \ }\ \vdots\ 101$;

13) Fie $n = \overline{a\ 4} + \overline{a\ \ \ } + \overline{a1b}$. Arătați că $n \vdots 7$

14) Fie $m = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$. Arătați că $13|m$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

15)Arătați că:

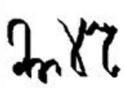
a) numerele de forma $\overline{a\ \ }$ care au cifrele consecutive sunt multiplu de 3.

b)produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2.

c) produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 3.

d)produsul a k numere consecutive este divizibil cu k oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

16) Arătați că numărul $a = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^9$ este multiplu de 6.

AUTOR 

Prof.Genoveva IOANA

Școala Gimnazială ”Mircea Eliade” Craiova